

Examen du 23 avril 2007 - 8h30 à 11h30

Nom : _____

Vous devez faire 5 des 8 questions suivantes, à votre choix. Vous avez droit à trois tuyaux. Si vous ne réussissez pas 5 problèmes, vous pouvez aussi remettre des solutions partielles mais à un maximum de 6 problèmes en tout.

1. Un de vos amis réalise le tour de magie suivant.

Il vous dit d'écrire un nombre de dix chiffres, puis d'écrire un deuxième nombre en déplaçant certains de ces dix chiffres. (Les deux nombres ont donc exactement les mêmes chiffres.) Vous avez alors deux nombres de dix chiffres. Vous faites la soustraction, le plus grand moins le plus petit, obtenant ainsi un troisième nombre.

Il vous dit d'encrer un chiffre du troisième nombre qui n'est pas un zéro, puis de lui lire les autres chiffres de ce nombre dans n'importe quel ordre.

Il vous dit alors quel chiffre vous avez encrer.

À vous d'expliquer comment il fait.

2. On place 10 points à l'intérieur d'un cercle de 5 cm de diamètre. Montrer qu'il y a au moins deux de ces points qui sont séparés par une distance inférieure à 2 cm.
3. Trouver le coefficient de x^m dans l'expression

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \dots + (1+x)^n,$$

où $k < n$ et $m \leq n$, pour m , n et k entiers.

4. Soit a , b , c , d , e et f des nombres réels. Déterminez la valeur maximale de f pour laquelle le système de deux équations suivant possède une solution.

$$a + b + c + d + e + f = 15$$

et

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 = 80.$$

Quelle est alors une solution du système ?

5. Un lapin vient manger des carottes dans le champ de Léonie. Gourmand mais pas idiot, il mange au moins une carotte par jour tout en s'assurant de ne pas trop en manger afin de ne pas se faire attraper. S'il a mangé au total 150 carottes pendant la belle saison, et si la belle saison dure 100 jours, montrer qu'il existe une suite de journées consécutives pendant lesquelles il a mangé au total exactement 49 carottes.

6. Soit a , b et c les longueurs des trois côtés d'un triangle ABC , et soit h_A , h_B et h_C les longueurs de ses trois hauteurs.

(10 points) Montrer que

$$\frac{abc}{h_A h_B h_C} > 1.$$

(10 points) Déterminer la valeur minimale de ce rapport (qui est donc une valeur plus grande que 1).

7. Des soldats marchent, à vitesse constante, en file indienne (l'un derrière l'autre). Cette file s'étale sur un kilomètre. Un officier part de l'arrière de la file, se déplace à vitesse constante vers la tête de la file et aussitôt qu'il l'a atteint, il revient sur ses pas jusqu'à ce qu'il atteigne le dernier soldat de la file (à l'arrière). Lorsqu'il rejoint ce soldat, la file s'est déplacée sur un kilomètre, de sorte que le dernier soldat est maintenant dans la position où le premier soldat était au tout début de la marche. Quelle distance l'officier a-t-il parcourue ?
8. Un quadrilatère a un sommet sur chacun des côtés d'un carré de côté de longueur 1. Montrer que les longueurs a, b, c et d des côtés du quadrilatère satisfont les inégalités

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

Bonnes vacances !

Tuyaux H07

1. Un nombre est congruent à la somme de ses chiffres modulo 9.
2. Afin de pouvoir utiliser le principe des tiroirs, on divise l'intérieur du cercle en neuf régions en traçant d'abord un cercle de 1 cm de rayon.
3. On pourra tout d'abord réécrire plus simplement l'expression, qui est de la forme $a^k + a^{k+1} + \dots + a^n$, pour obtenir beaucoup moins de termes. Pour ce faire, on peut multiplier cette expression par une expression simple et obtenir un télescopage. Il faudra par la suite traiter les cas $m \geq k$ et $m < k$ séparément.
4. On travaille avec l'équation $a + b + c + d + e = 15 - f$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de relier la valeur d'une somme à la valeur de la somme des carrés. En l'utilisant deux fois, on reliera la valeur de la somme à la valeur de la somme des puissances quatrième.
5. Évidemment, Dirichlet! Soit q_j le nombre de carottes mangées après j journées : on considère alors la suite $p_j = q_j + 50$.
6. (i) On peut écrire l'aire d'un triangle de manières différentes, l'une avec deux côtés et un angle, et l'autre avec un côté et une hauteur. En multipliant bien... on y arrivera. Pour (ii), notons que $-\sin$ est une fonction convexe sur $[0, \pi]$.
7. On cherchera tout d'abord à déterminer le rapport de la vitesse de l'officier à la vitesse des soldats.
8. On travaillera méthodiquement, en utilisant le Théorème de Pythagore à répétition avec des inégalités classiques.